

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

Facoltà di Scienze matematiche , fisiche e naturali

Sede di Brescia

CORSO BIENNALE DI PERFEZIONAMENTO IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA Anno
Accademico 1999-2000

Dai problemi di ottimo alle diverse soluzioni di ottimizzazione in una ipotesi di didattica modulare per ciclo secondario superiore o triennio ad indirizzo scientifico e tecnico – tecnologico

Relatore

Prof.Raffaella Manara

Tesi di

Giorgio Maggi

INTRODUZIONE

Straordinaria e singolare è stata l'esperienza in questi due anni di Corso di Didattica della Matematica (coordinatrice prof.ssa Marina Dalè) in quanto ho avuto l'opportunità di riflettere su alcuni aspetti poco conosciuti della scienza sia di tipo epistemologico che di relazione tra discipline scientifiche , deduttivo-matematiche, didattiche.

Dalle lezioni del prof Carlo Felice Manara e prof.ssa Raffaella Manara sullo " studio ed analisi delle strategie risolutive per i problemi" nasce, con la necessaria modestia dello studente universitario neofita e nel contempo la consapevolezza dell'insegnante di scuola superiore , la curiosa idea di capire meglio un problema di ottimo.

Meglio , come ?

Un mio vecchio insegnante di chimica soleva sostenere che " La misura della quantità di acido solforico prodotto in un Paese è sempre proporzionale alla misura della sua civiltà".....; altri valutavano corretto un disegno di impianto chimico che rispettasse alla lettera le norme UNICHIM e nel quale fosse raffigurato ,ben evidente, anche il pozzetto (ma a che serve il pozzetto? Per eliminare le scorie evidentemente!)

In un tema d'Esame di Stato per periti chimici si richiedeva di elaborare l'ottimizzazione di un impianto : il novello diplomando affrontò il problema studiandone l'economicità come se fosse un sistema chiuso a nessuno venne di parlare del "pozzetto" e di quanto le sue emissioni avrebbero influito sull'ambiente (forse era in programma il tema ma in quello di Scienze e non di Impianti chimici industriali !)

Ho un dubbio : le stesse mie perplessità potranno valere per geometri, ragionieri, generici tecnici usciti dalle nostre scuole?

Da queste mie osservazioni nasce il lavoro oggetto della tesi che, al di là della impostazione personale, vuole contribuire a sottolineare l'importanza di sinergie tra discipline nell'affrontare un problema vitale e per offrire all'allievo una visione organica del sapere in una immagine coerente e non frammentaria della realtà.

RELAZIONE

La ricerca di soluzioni **ottimali** da diversi punti di vista può essere variamente denominata **ottimizzazione**, programmazione matematica lineare o non lineare, pianificazione ,scelta, ricerca operativa decisionale , economica e tecnologica.

Spesso la specificità degli obiettivi scolastici per singola disciplina, la mancanza di modelli metodologici o forse anche la poca disponibilità di tempo, non lasciano spazio ad una valutazione trasversale e multidisciplinare dei concetti di elaborazione programmatica e ricerca di soluzioni **ottimali** al fine di realizzare ,nel futuro perito, un obiettivo formativo più alto del solo fine professionalizzante .

L'ottimo a scuola

Nella scuola media superiore la matematica affronta il problema da un punto di vista squisitamente teorico con scarsi esempi e ciò è previsto sia al biennio con un accenno e ripreso al quinto anno nel quale scelta, programmazione lineare e ottimo si trovano sempre al termine di un percorso didattico (per istituti professionali :geometria, insiemi numerici, goniometria e trigonometria, matematica finanziaria, statistica, analisi infinitesimale, informatica , applicazione all'economia : scelte in condizioni di certezza e certezza, ottimizzazione dei problemi a più variabili); per istituti tecnici : disequazioni, funzioni, numeri complessi, sistemi lineari, algebra dei limiti, funzioni, derivate di funzioni, integrali, massimi e minimi, flessi, studio di funzione, equazioni differenziali, problemi di scelta in condizioni di certezza e incertezza, programmazione lineare).

Appare chiaro come una simile proposta risulti spesso insufficiente nella realizzazione dell'obiettivo didattico trasversale che si proponga di realizzare un modello di comprensione globale della ricerca dell'ottimizzazione di un processo, che può essere indifferentemente di tipo industriale, economico, urbanistico, scientifico di base, epistemologico(e ciò con eguale dignità per ognuno di essi e nella relazione tra essi)La comprensione della problematica della ottimizzazione di procedure processi, problemi vari essendo un tema trasversale in un Istituto Tecnico andrà prevista in un percorso di avvicinamento . La matematica ha la funzione di fornire un contributo teorico attraverso la costruzione di certi modelli risolutivi di certe situazioni. Introdurre a partire dai primi anni alcuni esempi di problemi semplici e di modelli semplici di schematizzazione e soluzione può costituire una base interessante per comprendere anche i modelli di complessità assai più elevata che si affrontano poi negli ultimi anni. In questo lavoro si privilegerà un

percorso didattico inserito in un ciclo scientifico -tecnico-tecnologico più propriamente specifico per periti chimici industriali

L'ottimo per il futuro tecnico

Spesso accade che il tecnico conosca alla perfezione norme e procedure scientifiche, le sappia applicare in un progetto complesso come ad esempio un impianto di tecnologia industriale, oppure programmi di sviluppo economico ,urbanistico... ma dia scarso valore alle conseguenze del loro dimensionamento e impatto ambientale.(quanti tecnici , usciti dalle nostre scuole, giuravano sulla sicurezza delle centrali nucleari, sulla bontà di alcune solide economie , sulla necessità di" risanamenti" di vecchi quartieri cittadini.)

L'ottimo dalla parte dell'insegnante

Accade anche che l'insegnante di matematica e l'insegnante di chimica (abili nelle loro competenze " di nicchia") siano meno incisivi nel porsi traguardi didattici pratici di tipo

trasversale e necessari nello studio delle materie professionalizzanti il cui percorso arricchirebbe nell'ottica della multidisciplinarietà (contributo all'arricchimento della disciplina) e nella prospettiva di futura collaborazione interdisciplinare (interazione nella disciplina)

L'ottimo come obiettivo nella didattica

Dunque maggior peso nella didattica della ricerca dell'ottimo ,per affinare abilità e nuove e maggiori competenze nel più ampio e globale contesto di una dinamica produttiva che vive le interazioni economiche ma è anche sottoposta a vincoli sociali e territoriali .

Gli obiettivi per lo studente futuro perito (chimico capo tecnico) potrebbero essere così sintetizzati :

conoscere gli aspetti epistemologici e storici che hanno condotto alla individuazione e formalizzazione del concetto di ottimo

saper applicare il concetto di ottimo in una realtà industriale collegandolo al concetto di dimensionamento dell'impianto per poterne valutare le potenzialità di produzione

saper applicare il concetto di ottimo in una realtà industriale collegandolo al concetto di economicità per poterne valutare le potenzialità di mercato

saper analizzare il concetto di ottimo in una realtà industriale che integrata nel territorio debba tener conto del concetto di sviluppo sostenibile

Alla ricerca dell'ottimo

Si potrà definire **ottimizzazione** :

1 Individuazione di quella soluzione di un problema che comprenda i massimi vantaggi e i minimi rischi.

2 Procedimento di ricerca *del valore ottimo* (o *valore ottimale*) di una funzione in presenza di uno o più vincoli, attraverso l'impiego di metodi matematico - statistici

Nella programmazione matematica, tramite strumenti analitici e geometrici si studiano i metodi di ricerca di massimi e minimi di una funzione (detta *obiettivo*); e di ottimizzazione di tale funzione che può essere programmazione *lineare* (la più diffusa) o *non lineare* .

I punti di massimo e di minimo sono così descritti *per una funzione reale di variabile reale*

"sia $f(x)$ una funzione di dominio A , un punto c , interno ad A , si dice punto di massimo:

➡ *relativo per $f(x)$, se esiste un intorno I di c contenuto in A , tale che $f(x) \leq f(c)$ per ogni x appartenente a I*

➡ *assoluto per $f(x)$ se $f(x) \leq f(c)$ per ogni x appartenente a A*

E l'eleganza del teorema di Weierstrass ci offre un razionale sul valore oggettivo del massimo e minimo come elementi semplici ma identificativi di qualsivoglia sistema (funzione) dal più semplice al più complesso .Una semplificazione del teorema è ben espressa in (rif.13)

" Ogni funzione continua, in un dominio limitato chiuso, assume in esso il suo valore più grande e quello più piccolo "

E più ampiamente espressa(In rif.14)

"Se $f(x)$ è una funzione reale definita in un sottoinsieme **limitato** D di \mathbb{R} , esiste nella chiusura \bar{D} di D **almeno** un punto ξ in **ogni** intorno del quale l'estremo superiore di $f(x)$ coincide con l'estremo superiore che la $f(x)$ ha in **tutto** D ; ed esiste **almeno** un punto η in **ogni** intorno del quale l'estremo inferiore della $f(x)$ è uguale a quello che la funzione ha in **tutto** D "

Evoluzione storica del problema dell'ottimo

Nell'estate del 1949 all'Università di Chicago la Cowles Commission for Research in Economics promosse una conferenza nella quale economisti, matematici, e statistici presentarono i risultati di ricerche utilizzando strumenti di Programmazione Lineare. Si andava dalla programmazione della rotazione delle colture alla pianificazione di azioni militari su grande scala, dalla organizzazione delle rotte delle navi fra i porti alla valutazione dei flussi di prodotti fra le industrie. L'esigenza di un tale tipo di lavoro nacque (Fourier nel 1823 aveva elaborato un modello di PL) e si sviluppò durante ed immediatamente dopo la Seconda Guerra Mondiale perfezionandosi in una struttura

matematica e un metodo computazionale definito ALGORITMO del SIMPLESSO, precursore all'avvento dei primi calcolatori elettronici

La Seconda Guerra Mondiale testimoniò lo sviluppo di una pianificazione (e elaborazione di una tecnica scientifica di programmazione) su grandissima scala in tutto l'apparato militare statunitense (U.S. Air Corps) e in alcuni settori civili.

Durante la guerra l'Air Staff, nel 1943, creò una funzione di program monitoring sotto la guida del Professor E.P. Learned di Harvard. : il programma, iniziò con il piano in cui erano contenuti tutti gli obiettivi del tempo di guerra, fu elaborato attraverso stadi successivi con una organizzazione dei processi di pianificazione e costante elaborazione dei dati raccolti

Dopo la Seconda Guerra Mondiale si comprese la necessità del coordinamento, attraverso una tecnica di programmazione scientifica delle risorse a disposizione. rendendo realizzabile: lo sviluppo degli elaboratori elettronici, e di un modello inter - industriale, inteso come il metodo di descrizione delle relazioni fra le industrie in una data economia, dovuto a Wassily Leontief, e descritto con l'uso di funzioni di produzione lineare nella descrizione delle attività industriali

La generalizzazione dell'approccio inter-industriale che estese l'applicabilità a realtà di relazioni complesse tra industrie rese necessario lo sviluppo di un modello di programmazione lineare (luglio 1947) con il metodo del Simplex. (l'Air Force sponsorizzò un lavoro del U.S. Bureau of Standards su elaboratori elettronici e tecniche matematiche per risolvere questo tipo di modello)

Si sviluppa il concetto di **ottimizzazione** nella sua accezione più moderna : Nel giugno del 1947 nacque a questo scopo un primo gruppo di ricercatori (I principali membri di questo gruppo furono: M.Wood, G.B. Dantzig, J. Norton, M. Geisler) battezzato ufficialmente con il nome Project SCOOP (Scientific Computation of Optimum Programs).

Negli anni cinquanta la P.L. entrò in largo uso nel settore industriale e, data la complessità del procedimento (per metodo ed elevato n° di variabili), essa trovò un buon campo di applicazione nella ricerca operativa aziendale più che nel campo della macroeconomia (esempio problemi di trasporto, gestione scorte magazzino, combinazione di fattori di produzione, problemi di strategia bellica ecc.)

Dunque programmazione lineare come problema di scelta genericamente caratterizzato da una funzione obiettivo lineare soggetta a vincoli (disequazioni o equazioni) anch'essi lineari di primo grado e inquadrate nell'ampio contesto della "ricerca operativa".

Ricerca operativa : scienza che studia metodi e strategie da proporre a coloro che devono operare una scelta ovvero prendere decisioni sia in situazioni certe che incerte. Per la formalizzazione di un problema di ricerca operativa esistono metodologie più propriamente teoriche quali :

1. individuare la funzione obiettivo e i punti di **ottimo**,
2. individuare le "variabili d'azione" da cui dipende la funzione obiettivo,
3. individuare i vincoli (disequazioni o equazioni) che limitano le variabili d'azione (i vincoli possono essere di segno es $x_1 > 0$ o tecnici ad esempio disponibilità di risorse, esigenze di mercato..),

4. racchiudere il sistema dei vincoli nella cosiddetta " area ammissibile o campo di scelta" nella quali si trovano tutte le possibili soluzioni e anche quelle che **ottimizzano** la funzione obiettivo

oppure metodologie di tipo pratico :

1. preparazione : ,definizione del problema , degli obiettivi e raccolta dei dati statistici
2. Impostazione : studio dei fattori costanti e variabili , esame delle alternative, elaborazione di un modello
3. Elaborazione : scomposizione analitica, applicazione, procedimenti matematici
4. Verifica : applicazione e controllo

La complessità della applicazioni è tale che è impossibile darne un quadro completo : mi limiterò ad accennare ad alcuni campi di applicazione (volutamente disgiunti per meglio sottolineare l'unicità del modello di riferimento)

In economia i contatti tra T. Koopmans della Cowles Commission, R. Dorfman, e economisti quali P. Samuelson, diedero inizio ad un'epoca di intensa revisione delle teorie economiche classiche usando i risultati e le idee della programmazione lineare:

Nelle scienze matematiche Il contatto con J. Von Neumann al Institute for Advanced Study, diede fondamentali intuizioni sulla teoria matematica e accese l'interesse di A.W. Tucker della Princeton University e dei suoi studenti, che affrontarono i problemi della teoria della disuguaglianza lineare e della teoria dei giochi. Senza trascurare la prospettiva dell'ottimo vista attraverso le scienze statistiche e probabilistiche.

Nelle tecnologie chimiche industriali (rif.6,rif.7) modelli sono stati proposti nella determinazione dello spessore degli isolanti , rapporto di riflusso economicamente più conveniente in colonne di distillazione, economia nel numero degli effetti in un sistema di evaporatori, ...)

Nelle scienze urbanistiche Nascono i modelli di pianificazione che esaminano la sensitività delle soluzioni al variare di parametri, vincoli e criteri. Esempio il Modello di Schlager(rif.8) (1956): studia la destinazione ottimale delle aree o unità di riferimento in cui è suddiviso il suolo, secondo espliciti criteri di ipotesi alternative applicate ad ogni area , alla quale sono assegnate funzioni mutuamente compatibili(residenziali, produttive, di servizio...) .Modello dei percorsi minimi studia la localizzazione ottima dei servizi e minimizzazione dei costi di trasporto (Weber) . Modello si sviluppo sostenibile

In filosofia : Un moderno dibattito critico sul concetto di "scelta" si sviluppa con Bachelard e Popper il quale estendendo la sua concezione alla storia e alle scienze sociali, si mostra fortemente critico verso la possibilità di individuare delle leggi all'interno del divenire storico e proponendo in alternativa un approccio `aperto', costantemente modificabile in dipendenza dalla realtà e chiuso a ogni tentazione di determinismo. Segue Friedmann il quale studia il concetto di complessità e lo inquadra nei continui mutamenti della società e nell'aumento della frequenza di questi. La complessità può temperarsi intervenendo sulla interazione continua tra variabili e vincoli nell'ambiente e nel sistema sociale interessato ad esempio dalla fine della società di classe; migrazioni di massa; erosione del territorio sia fisica che culturale; spinte competitive; internazionalizzazione del capitale; trend demografico

indirizzi

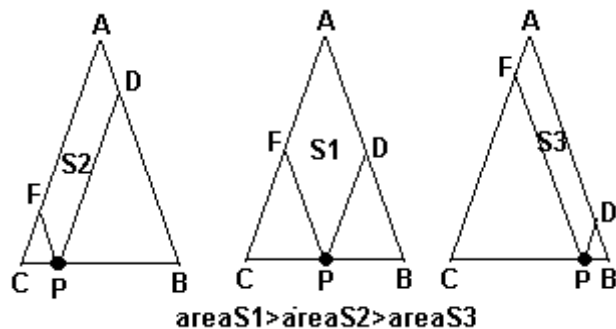
In Italia è attivo il Centro per la Ricerca Operativa presso l'Università Bocconi di Milano, e l'Associazione Italiana di Ricerca Operativa istituita in Roma nel 1961.

- CIRO - Centro Interuniversitario per la Ricerca Operativa, Università degli Studi di Firenze.
- AIRO - Associazione Italiana di Ricerca Operativa
- Italian Domain Survey a cura di Audipress Communications Svcs. • Ricerca Operativa - Gruppo di Pisa
- Ricerca Operativa - Gruppo di Perugia
- A.I.R.O - the Italian Association for Operations Research
- U.M.I. - Unione Matematica Italiana. Dipartimento Istruzione Universitaria of MURST (The Italian Ministry for University and Research) MURST
- the International Federation of Operations Research and Management Science

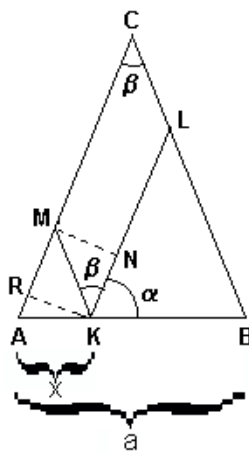
L'ottimo : prime intuizioni

- Secondo lo storico Cantor (citato a proposito in rif.11), la più antica questione di massimo espressa consapevolmente si trova nella proposizione 27 del libro VI degli "Elementi" di Euclide(300a.c.) e opportunamente modificata può essere espressa nella forma seguente :

"dato un triangolo isoscele ABC, se ad un punto P della base BC si conducono le parallele PD ad AC e PF ad AB , l'area del parallelogramma ADPF è massima quando P è il punto medio di BC"



che è possibile dimostrare:



$$\hat{A}CB = \hat{M}KL = \beta$$

$$\hat{C}AB = \hat{L}KB = \alpha$$

$$\overline{KL} = \frac{\overline{KB}}{2 \cos \alpha} = \frac{\overline{KB}}{2 \cos \alpha} = \frac{a-x}{2 \cos \alpha}$$

$$\overline{RK} = x \sin \alpha$$

$$\text{area KMCL} = \overline{KL} \cdot \overline{RK} = \frac{a-x}{2 \cos \alpha} x \sin \alpha$$

posso anche calcolare l'area da

$$\overline{MN} = \overline{MK} \sin \beta = \frac{x}{2 \cos \alpha}$$

$$\text{area KMCL} = \overline{KL} \cdot \overline{MN} = \frac{a-x}{2 \cos \alpha} \cdot \frac{x}{2 \cos \alpha} \sin \beta =$$

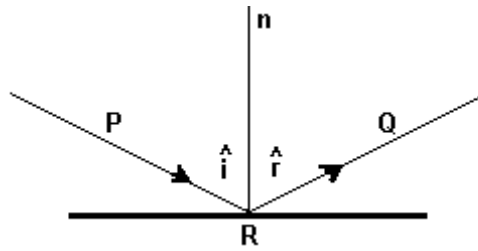
ne concludo che

$$\text{area KMCL} = (a-x) x \cdot \text{costante}$$

la derivata prima che sarà $(a - 2x) \cdot \text{costante}$, si annullerà

nel suo punto massimo assumendo x il valore di $x = a/2$

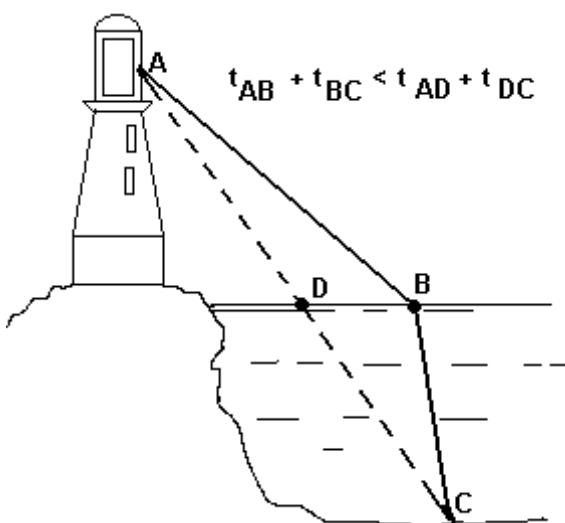
- Altri elementi di massimo e minimo classici sono (**Zenodoro** 200a.c.?):
 - il prodotto di due numeri reali è massimo quando i due numeri sono uguali tra loro
 - tra i triangoli a uguale perimetro, il triangolo equilatero ha area massima
 - tra tutti i triangoli rettangoli di data ipotenusa, l'isoscele ha area e perimetro massimo
 - tra tutti i triangoli di perimetro dato, l'equilatero ha cerchio iscritto di area massima (e cerchio circoscritto di area minima)
 - tra i quadrilateri convessi di dato perimetro, il quadrato ha area massima
 - tra tutti i poligoni convessi aventi perimetro assegnato, quello regolare ha area massima.
 - Tra tutti i parallelepipedi di superficie assegnata il cubo ha volume massimo
- Medesimi concetti furono applicati da **Erone di Alessandria** (sec. I a.C.) Matematico e fisico greco. Questi descrisse in un'opera enciclopedica una grande quantità di invenzioni e in ottica formulò le leggi della riflessione ipotizzando che la luce segua il minimo percorso. Dunque: nella riflessione di un raggio di luce su uno specchio piano la condizione che l'angolo di incidenza sia uguale all'angolo di riflessione è equivalente al fatto che il cammino PRQ sia di minimo



- Gli studi di **Pierre de Fermat** (Beaumont-de-Lomagne 17.8.1601 - Castres 12.1.1665) sui massimi e minimi si possono considerare la prima trattazione del calcolo delle variazioni, da lui applicato allo studio della riflessione e rifrazione della luce. Il **principio di Fermat** (1650) è il principio generale dell'ottica geometrica per cui un raggio luminoso procedendo da A a B segue il cammino che richiede il minor tempo possibile (o massimo o stazionario); (tutte le leggi dell'ottica geometrica (riflessione e rifrazione della luce, ecc.) ne sono una diretta conseguenza (Willebrod Snell (1591 - 1626) scopre sperimentalmente la legge della riflessione dedotta dalla teoria corpuscolare della luce di scuola pitagorica, riproposta con criteri diversi da Galileo , Renè Descartes (1596 - 1650) Cartesio) e sostenuta da Newton e Leibniz (rif.5)
- Descartes in La Dioptrique (1637) suppone tra i primi che la luce si propaghi più rapidamente nel vetro che nell'aria da cui la rifrazione(teoria corpuscolare) , mentre Fermat parte dall'ipotesi opposta e giunge curiosamente allo stesso risultato con una logica che può essere ben espressa dai seguenti esempi

1) Esempio del faro

Il raggio per raggiungere C segue il percorso naturale ABC ; per quale motivo non segue il percorso diretto ADC? Si potrebbe spiegare il paradosso affermando che nell'acqua la luce si propaga con minor velocità che nell'aria e dunque il raggio luminoso impiegherà meno tempo a percorrere ABC perché minore sarà il tempo da B a C rispetto al tempo da D a C



2) esempio del percorso stradale

applicando il principio di Fermat ad un percorso stradale costituito da autostrada in pianura nel primo tratto e da strada di montagna nel secondo sarà evidente che sarà più

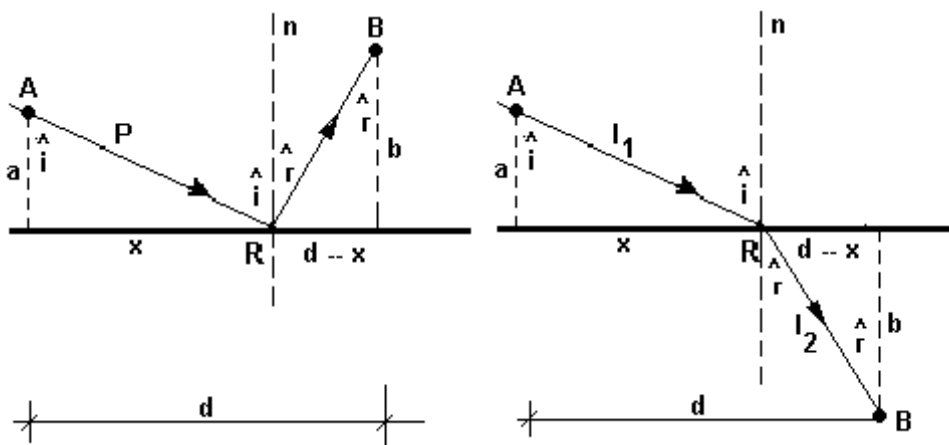
vantaggioso seguire il cammino più lungo se, per la maggior parte del percorso, posso fare autostrada che permette tempi di percorrenza minori a maggior velocità v .

Il principio di Fermat viene spesso enunciato al momento della dimostrazione della legge della riflessione o rifrazione nella quale si definisce il percorso totale del raggio luminoso e si annulla la sua derivata nel punto minimo (o massimo o stazionario), dimenticando che il concetto di derivata nasce con il calcolo infinitesimale (sviluppato da Newton e Leibnitz) in tempi più tardi.

Dunque dalla classica dimostrazione della riflessione e rifrazione scaturirà valutazione sulla tendenza del raggio luminoso a scegliere un percorso "**ottimo**"; successivamente sarà interessante passare a esempio di metodo usato nel 1600 in alternativa al metodo della derivata e successivamente valutare alcuni problemi di **ottimo** che possano chiarire meglio una possibile applicazione del concetto di **ottimizzazione** di semplici problemi pratici .

-

Riflessione e rifrazione :



Riflessione (rif 12) : ricavo il percorso totale I da A a B , annullo la derivata e scopro che la riflessione prevede un percorso "**ottimo**" in cui gli angoli di incidenza i e riflessione r sono uguali e ciò in accordo al principio di Fermat

$$I = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2}$$

$$\text{quando } \frac{dI}{dx} = 0 \text{ sarà } \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

$$\text{e quindi } \sin i = \sin r \text{ da cui } i = r$$

Rifrazione : il tempo di percorrenza da A a B sarà $t = I_1/v_1 + I_2/v_2$ (dove v rappresenta la velocità) , e per il principio di Fermat I deve essere minimo (o massimo o stazionario) e questo avviene in $dI/dx = 0$

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2}$$

la funzione diventa minima azzerandone la derivata

$$\text{da cui: } \frac{2x}{2v_1\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{2(d-x)}{2v_2\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

semplificando:

$$\frac{x}{v_1 l_1} = \frac{(d-x)}{v_2 l_2} \quad \text{cioè} \quad \frac{l_1 \sin i}{v_1 l_1} = \frac{l_2 \sin r}{v_2 l_2}$$

e semplificando ulteriormente giungo alla relazione $\sin i \sin r = v_1 v_2 = n$

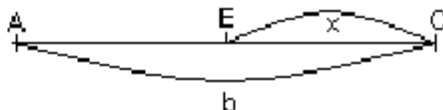
E questa è l'espressione matematica della riflessione definita principio anche di Descartes, sperimentalmente dimostrata da Snell (Snellius) ma sicuramente legata al generale principio di Fermat che ancora una volta sottolinea come tra le varie ipotesi di percorso luminoso del raggio vi sia quella in cui esso risulti minimo con valori diversi a seconda della natura del mezzo .

Dalla fisica alla geometria a semplici problemi geometrici di matematica applicata

L'elegante metodo di Fermat (vissuto in un periodo precedente alla definizione del concetto di derivata) può essere riproposto con l'esempio seguente ⁽³⁾ :

PROBLEMA N°1a

PROBLEMA : Dividere il segmento AC in modo che AE x EC sia massimo



Fissato $AE=b-x$ e $EC=x$ deve essere massimo $AE \cdot EC=(b-x) \cdot x=bx-x^2$

immaginando di aggiungere e togliere un numero infinitamente piccolo e ai segmenti studiati avrò:

$$AE-e \cdot EC+e = (b-x-e) \cdot (x+e) = bx+be-x^2 -2ex-e^2$$

perchè questo sia massimo sarà uguale al precedente e cioè

$$bx+be-x^2-2ex-e^2 = bx-x^2$$

$$be = +2ex+e^2$$

dividendo per e

$$b = +2x+e$$

sopprimendo e perchè infinitamente piccolo

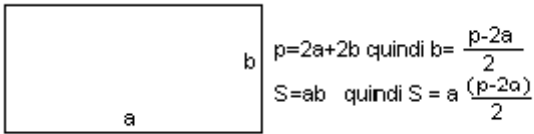
$$b = +2x$$

Usando le derivate si potrebbe scrivere così:

Trovo il massimo per la funzione $bx-x^2$ in modo che la sua derivata si annulli , dunque $b - 2x=0$ e quindi $b=2x$

PROBLEMA 1b :

Allo stesso modo posso immaginare quale tra diversi rettangoli con lo stesso perimetro sia quello con superficie più grande



valuto S funzione di a $S = \frac{ap}{2} - a^2$

la derivata di S funzione di a sarà $S' = \frac{p}{2} - 2a$

quando S è massimo la sua derivata si annulla $\frac{p}{2} - 2a = 0$
e quindi $p = 4a$

Sostituendo a $p = 2a + 2b$ ottengo $2a + 2b = 4a$ e quindi $b = a$ (il parallelogramma è quadrato)

PROBLEMA 2

Se capovolgo il problema e cioè calcolo quale tra i diversi rettangoli a stessa superficie ha il perimetro più piccolo sostituisco il valore di $b = S/a$ al perimetro $p = 2a + 2b = 2a + 2S/a$.

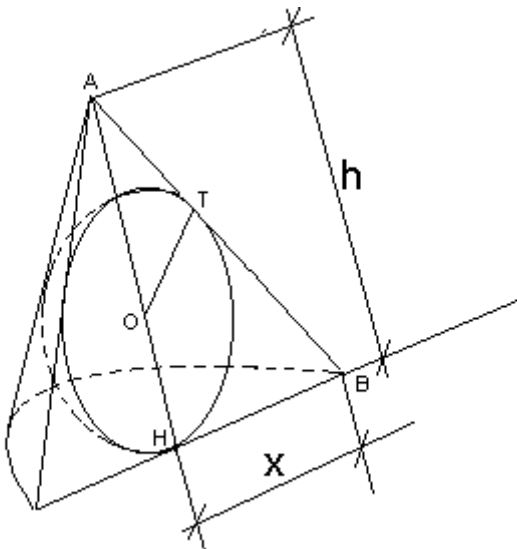
La derivata del perimetro funzione di a sarà $p' = 2 - 2s/a^2$ e al suo valore minimo sarà =0

$2 - 2s/a^2 = 0$ e $S = a^2 = ab$ dunque $a = b$ (il parallelogramma è quadrato)

(Un problema di questo tipo può essere utile per mettere in relazione le intuizioni di Fermat, le derivate e il problema degli isoperimetri di Zenodoro : tra tutti i poligoni di uguale perimetro con n lati, è massima l'area di quello regolare)

PROBLEMA N°3

Si determini l'altezza e il raggio base del cono di volume minimo circoscritto a una sfera di raggio r.



Poichè è $h/x = AH/BH = AT/OT$

$$\frac{h}{x} = \frac{\sqrt{(h-r)^2 - r^2}}{r} = \frac{\sqrt{h^2 - 2hr}}{r}$$

Da cui si ricava h

$$h = \frac{2rx^2}{x^2 - r^2}$$

Che sostituito nel valore del volume del cono circolare retto che è :

$$V = (\pi x^2 h)/3 = (2\pi r x^4)/3(x^2 - r^2)$$

Annullando la derivata

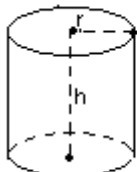
$$V' = 2x^3 (x^2 - 2r^2)/(x^2 - r^2)^2 = 0$$

da cui il cono di volume minimo avrà

$$X = \sqrt{2}r \text{ con } h = 4r$$

PROBLEMA N°4

Devo costruire un serbatoio che a parità di volume abbia minima superficie (dunque meno pesante , meno costoso, con minor superficie radiante se si tratta di un serbatoio petrolifero che debba mantenere una temperatura superiore alla temperatura ambiente)



Essendo il volume $V = \pi r^2 h$ e quindi $h = \frac{V}{\pi r^2}$
 Essendo la superficie totale S_t e sostituendo

$$S_t = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + 2V \frac{1}{r}$$

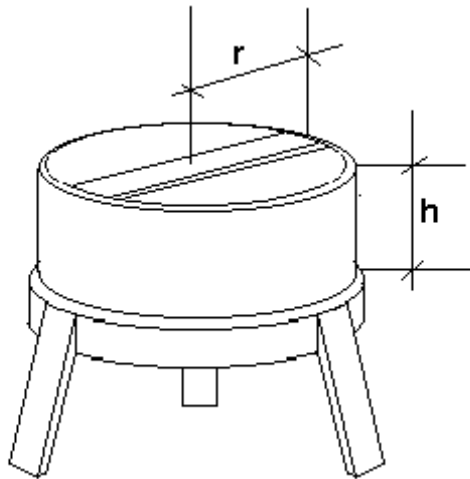
La variabile S rispetto ad r deve essere minima e cioè la sua derivata =0

$$S'_t = 4\pi r - 2V \frac{1}{r^2} = 0 \quad \text{e} \quad 4\pi r = 2V \frac{1}{r^2} \quad \text{e quindi} \quad 4\pi r^3 = 2V$$

$$\text{e sostituendo } V = \pi r^2 h \quad 4\pi r^3 = 2\pi r^2 h$$

ricavo $2r = h$

PROBLEMA N°5 Devo costruire un reattore a tino , aperto in alto , che a parità di volume abbia minima superficie (dunque meno pesante , meno costoso)



Il problema , analogo al precedente ha risoluzione diversa quando sia prevista l'apertura in alto infatti

la superficie totale del tino aperto sarà

$$S = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = \pi r^2 + 2 \frac{V}{\pi r}$$

e questa sarà la funzione la cui derivata è da rendere =0 nelle condizioni di minimo : dunque:

$$S' = 2\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0$$

e cioè :

$$2\pi r = \frac{2V}{r^2} \text{ semplificabile a } r^3 = \frac{V}{\pi} = \frac{\pi r^2 h}{\pi}$$

da cui $r = h$

L'ottimo : cenno ai problemi di scelta in condizioni di certezza

I problemi di scelta rientrano nella disciplina cosiddetta della Ricerca Operativa nella quale vengono studiati metodi e strategie in cui si debba operare una scelta ovvero prendere decisioni sia in situazioni di certezza che di incertezza.

PROBLEMA N°6

Un impianto di distillazione sostiene un costo fisso settimanale di £ 900.000 , un costo di £ 150 per ogni litro di prodotto distillato e un costo aggiuntivo, pari al 10 % del quadrato della quantità prodotta, per smaltimento dei residui della distillazione considerati rifiuti speciali secondo Dlgs 22/97(decreto Ronchi)

Considerando x la quantità prodotta settimanalmente ,

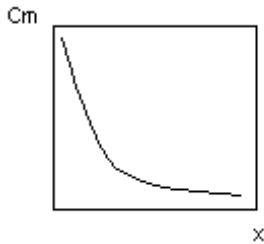
il costo totale settimanale sarà :

$$C = 900.000 + 150 x + 0,1 x^2$$

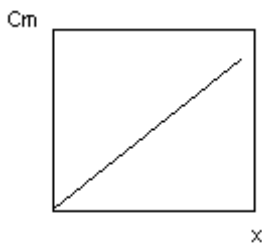
e il costo medio evidentemente sarà :

$$C_m = (900.000 + 150 x + 0,1 x^2) / x = (900.000/x) + 150 + 0,1x$$

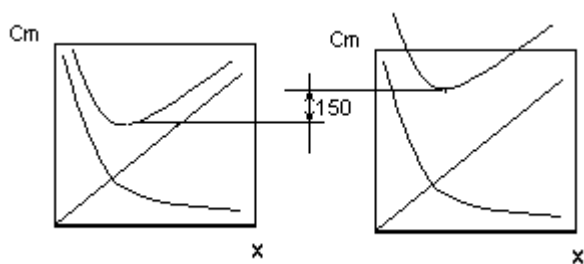
Sarà possibile portare in grafico una tale funzione immaginando di costruire la curva relativa a $C_m = f(900.000/x)$



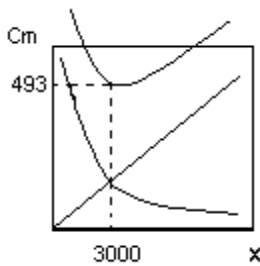
La curva relativa a $C_m = f(0,1 x)$



la curva risultante dalla somma delle due funzioni in un unico grafico in cui possa avvenire la opportuna traslazione relativamente al valore di 150



Dal grafico si vede che il minimo di costo medio C_m si ha in corrispondenza del punto di incontro delle due funzioni $0,1x$ e $900.000/x$ dunque $0,1x = 900.000/x$ da cui $x = 3000$ e il costo medio al litro sarà $C_m = 493 \text{ £}$



PROBLEMA N°7

premessa

Come si sa, la distillazione non porta alla netta separazione dei componenti della miscela iniziale a meno di non ripetere più volte le operazioni che sono alla base dei processi stessi (distillando e ridistillando per più volte uno stesso prodotto si può arrivare a ottenere un composto puro); la moderna industria ha realizzato una apparecchiatura che racchiude in se tutti gli stadi di una sequenza significativa di distillazioni detta colonna di rettifica.

Il principio in se è abbastanza semplice in quanto una parte del liquido distillato viene reimpresso nella stessa colonna per successive operazioni di distillazione: il rapporto di riflusso R è il rapporto tra la quantità O di liquido che ritorna in colonna per subire una nuova distillazione e la quantità D che viene prelevata come distillato.

Dunque la scelta andrà fatta tenendo conto che maggiori sono le distillazioni migliore è la qualità del prodotto; contemporaneamente maggiori sono le distillazioni maggiori sono i costi di esercizio e quindi l'ottimo delle condizioni di lavoro si otterrà in una situazione operativa intermedia indicata dal rapporto R che rappresenta la quantità di prodotto che si decide di ridistillare rispetto alla quantità di prodotto finito.

Dunque

$R = O/D$ sarà massimo quando O è massimo e dunque tutto il prodotto ritorna in colonna per successiva distillazione

$R = O/D$ sarà minimo quando D è massimo e dunque tutto il prodotto viene prelevato senza ulteriore distillazione

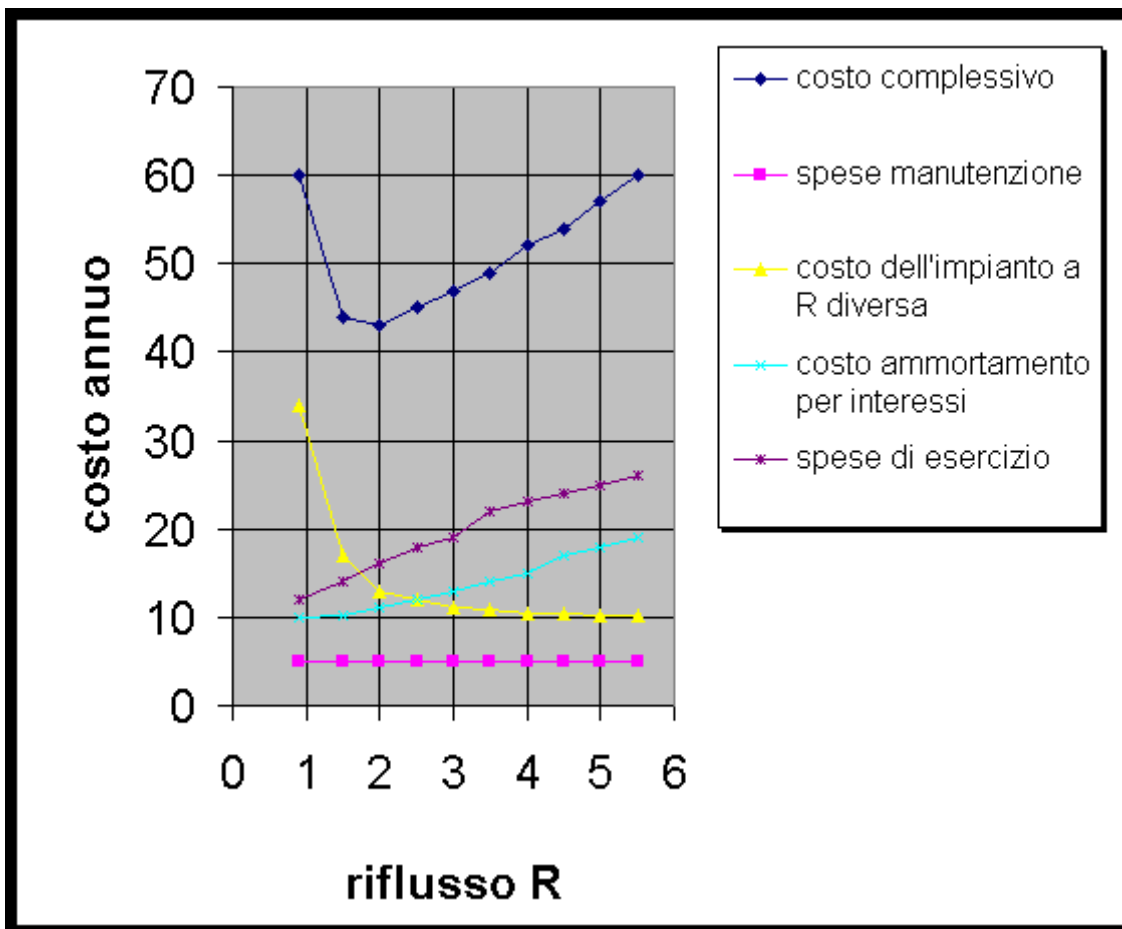
Obiettivo

Calcolare le condizioni di riflusso economicamente più conveniente in una distillazione per rettifica in cui

- le spese di manutenzione dell'impianto siano costanti al variare di R
- il costo dell'impianto, relativamente agli interessi ed ammortamento della colonna, che ha valore infinito per R minimo e diminuisce all'aumentare del rapporto di riflusso,;
- il costo dell'impianto riguardo agli interessi e all'ammortamento che comportano il ribollitore e il condensatore (elementi indispensabili alla colonna di rettifica), costo che aumenta con l'aumentare di R ;

- d. le spese di esercizio (costo del combustibile per il ribollitore, acqua per il condensatore, energia necessaria per far funzionare la pompa di circolazione del riflusso) che aumentano con R

Un esempio di elaborazione dei dati di spesa di manutenzione e esercizio e costi di diversi di impianto e ammortamento , riportati in grafico danno una sintesi grafica nella curva cosiddetta del costo complessivo di esercizio il cui punto minimo indica a quali valori di riflusso si debba operare per ottenere quel particolare prodotto a costi minimi



La risoluzione grafica per quel particolare esempio produttivo evidenzia che per avere un costo minimo dell'impianto esso deve lavorare con un riflusso effettivo di $R = 2$

L'ottimizzazione dei processi industriali e della gestione dei processi chimici è attualmente demandato a programmi software per computer.

Un computer può essere programmato in modo da fargli gestire attivamente il processo e non solo affidandogli il semplice controllo delle variabili del processo.

Poiché le condizioni operative subiscono o possono subire variazioni con il passare del tempo , sarà opportuno considerare la necessità di variare il set point della variabile controllata (definito "set point" variamente come valore di soglia finalizzato a mantenere l'equilibrio, ovvero come "punto di ottimo" che nasce da una scelta ragionevole delle condizioni di esercizio in un ambiente in cui esiste un equilibrio tra condizioni di instabilità, l'operatore esterno può intervenire prendendo opportune decisioni oppure il calcolatore

stesso interverrà sviluppando i dati per ottenere i migliori valori relativi al problema specifico realizzando una **ottimizzazione diretta**.)

Un semplice esempio di ottimizzazione diretta può essere individuato nella programmazione di un computer che, prevedendo future incrostazioni interne, elabori dati in tempo reale che garantiscano il funzionamento della apparecchiatura come se questa fosse nuova.

Un impiego del computer per tecniche di ottimizzazione delle risorse è la simulazione di nuovi processi o del futuro funzionamento di processi già in funzione .

Ottimizzazione diretta può avvenire con la cosiddetta " regolazione predittiva" in cui un processo nuovo , mai realizzato viene ridotto a modello matematico oppure il processo è già attivo e il conseguente modello matematico è rivolto a studiare le variabili del processo e sviluppare relazioni causa effetto . I modelli possono essere formati da equazioni differenziali o algebriche .

L'ottimizzazione è affidata in tempo reale ai cosiddetti terminali dell'hardware che principalmente sono costituiti da sistemi di controllo: tra questi i regolatori hanno la funzione di confrontare il segnale in arrivo con il set point (vedi precedente definizione) e di agire ottimizzando le prestazioni dell'impianto.

Detto x lo scostamento dal set point della grandezza misurata e y la variazione indotta dal controllore all'organo regolante, La regolazione potrà essere ad azione proporzionale ($y = - kx$) ; ad azione integrale ($dy/dt = - kx$) ; ad azione derivata ($y = k dx/dt$)

Dunque i meccanismi pratici di raggiungimento dell'ottimo possono essere **proporzionali** con spostamenti improvvisi e di breve durata ma non frequenti(aumenta istantaneamente → chiudo proporzionalmente), ad **azione integrale** per spostamenti piccoli e graduati che avvengano gradatamente nel tempo; ad **azione derivata** in cui la velocità di regolazione è proporzionale allo spostamento (aumenta istantaneamente → chiudo subito e tutto)

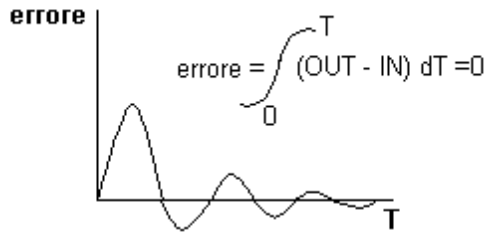
PROBLEMA N°8

Valutazione dell'ottimo in un sistema di controllo dotato di retroazione (cioè dotato di un sistema di regolazione ovvero di un elemento che interponendosi al processo ne consenta una messa a punto costante , affidabile, precisa, e ciò misurando le informazioni in uscita per modificare opportunamente le condizioni di ingresso)

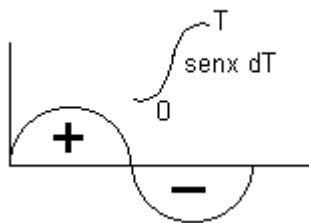


Valutare l'ottimo nella regolazione di un processo è valutare l'errore che si verifica nella retroazione che modificherà opportunamente il comando : sarà ottima la regolazione in cui l'integrale dell'errore si annulla :

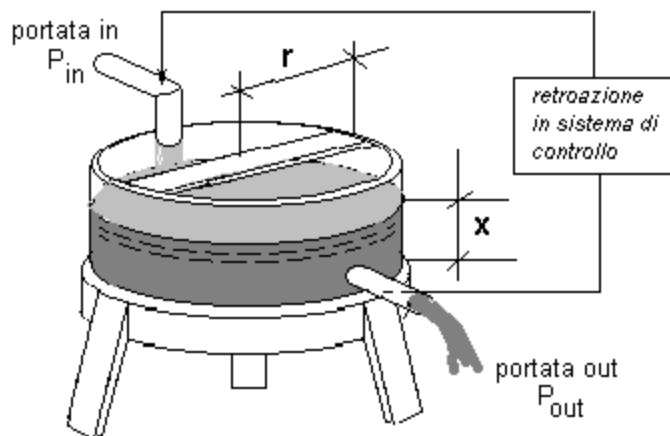
(detto T il tempo necessario affinché il sistema si stabilizzi e dunque raggiunga il minimo errore)



(si potrebbe convenire non banalmente che l'ottimizzazione avviene ad annullamento dell'integrale e non ad annullamento dell'errore così come l'integrale di $\sin x$ può tendere a 0 assumendo $\sin x$ valori non nulli alternativamente positivi e negativi.)



un semplice esempio potrà aiutare a applicare un sistema di controllo di livello ad un reattore a tino come quello schematizzato nel problema n° 5



$$\text{volume del liquido } V = \pi r^2 \cdot x \quad \text{portata del liquido} = P = \frac{V}{T}$$

$$x = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{P \cdot T}{\pi r^2} = \frac{T}{\pi r^2} (P_{in} - P_{out}) = \text{costante}$$

$$\text{errore} = \int x dT = x T = k \cdot T^2$$

in questo caso l'errore è direttamente proporzionale al quadrato del tempo T e l'ottimo della regolazione sarà per un sistema di controllo che annulla l'errore in tempi minimi

Cenni alle tecniche di programmazione lineare (scelte in condizioni di certezza)

Programmazione lineare riguarda particolari problemi in condizioni di certezza con effetti immediati caratterizzati da una funzione obiettivo lineare soggetta a vincoli (disequazioni o equazioni) anch'essi lineari di primo grado.

Programmazione come costruzione di modelli di ottimizzazione in cui si minimizza o si massimizza una funzione detta funzione obiettivo lineare (di primo grado) dipendente da un numero finito di variabili collegate tra loro da uno o più vincoli.

Questa parte introduce il concetto di modello matematico ben definito (in rif.11) come : "*sia T un insieme di elementi di natura qualsiasi e siano questi elementi legati tra di essi da determinate relazioni logiche. Si chiama modello di T un insieme T' tale che gli elementi di T e di T' si corrispondano secondo una determinata legge e tale che in T' valgano le stesse relazioni logiche valide in T*"

(più avanti si vedrà come il modello matematico possa evolvere in modelli fisici più complessi)

Negli esempi successivi si studieranno problemi risolvibili utilizzando il metodo grafico :

PROBLEMA N°10

Una azienda farmaceutica vuole preparare un alimento dietetico D contenente non più del 10% di grassi, almeno il 23% di proteine non più del 30% di carboidrati . Per ottenere tale alimento l'azienda intende miscelare tre prodotti , x₁, x₂, x₃ già esistenti in commercio che contengono le seguenti %

x₁ : 6% di grassi; 20% di proteine; 15% di carboidrati (al prezzo di £ 5000/kg)

x₂ : 20% di grassi, 20% di proteine; 45% di carboidrati(al prezzo di £ 8000/kg)

x₃ 10% di grassi, 25% di proteine; 24 % di carboidrati(al prezzo di £ 6000/kg)

Determinare come devono essere mescolati i tre prodotti per ottenere un alimento con le caratteristiche richieste e che sia allo stesso tempo il più economico possibile

Per formare 1kg di alimento al costo z , la funzione obiettivo da minimizzare sarà :

$$z = 5x_1 + 8x_2 + 6x_3$$

e i vincoli saranno :

studio la funzione per 1kg di alimento e dunque $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ da cui $x_3 = 1 - x_1 - x_2$

a. l'alimento deve contenere non più del 10% di grassi e cioè

$$0,06x_1 + 0,20x_2 + 0,10x_3 \leq 0,10$$

b. l'alimento deve contenere almeno il 23 % di proteine e cioè

$$0,20x_1 + 0,20x_2 + 0,25x_3 \geq 0,23$$

c. l'alimento deve contenere non più del 30% di carboidrati cioè

$$0,15x_1 + 0,45x_2 + 0,24x_3 \leq 0,30$$

d. inoltre sarà evidente che $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

sostituendo il vincolo a alla funzione obiettivo il numero delle variabili si riduce a 2 e il modello sarà :

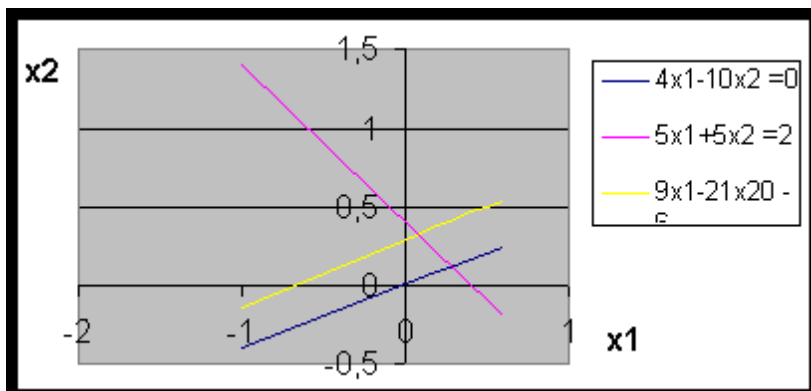
$$z = -x_1 - 10x_2 + 6$$

vincoli :

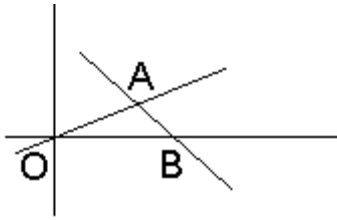
1. $4x_1 - 10x_2 \geq 0$
2. $5x_1 + 5x_2 \leq 2$
3. $9x_1 - 21x_2 \geq -6$
4. $x_1 + x_2 - 1 \leq 0$

$$x_1, x_2, \geq 0$$

Riportando i vincoli in grafico individuo un triangolo ABO di vertici O(0,0); A(2/7;4/35); B(2/5,0)



Dunque considerando il triangolo, x_1 assumerà il valore minimo in B per $x_1=2/5$ e $x_2=0$ e sostituendo nella funzione i dati ottengo $x_3 = 0,6$



Conclusione : all'azienda conviene preparare un kg di alimento miscelando tra loro kg0, 4 di prodotto x1, e 0,6 di prodotto x3 con una spesa di £ 5600 (non utilizzerà prodotto x2 perché renderebbe meno conveniente qualsiasi altra miscela).

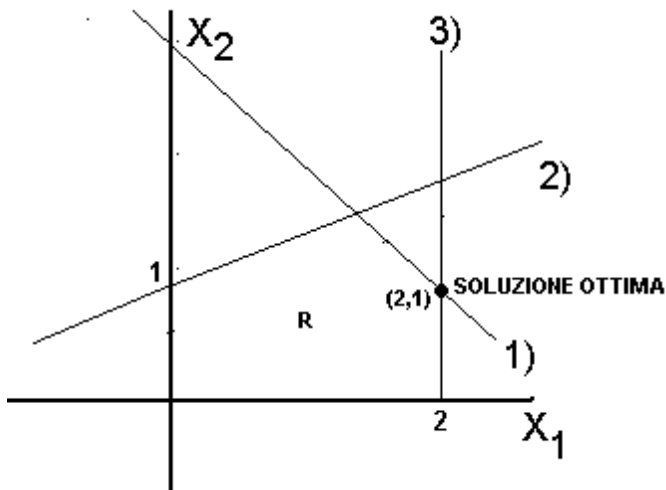
PROBLEMA N°11

Un accenno all'algoritmo del SIMPLESSO potrebbe partire dallo studio della funzione

$$\text{Max } f(X) = 2x_1 + x_2$$

con vincoli :

- 1) $x_1 + x_2 \leq 3$
- 2) $-x_1 + 2x_2 \leq 2$
- 3) $x_1 \leq 2$
- 4) $x_1, x_2 \geq 0$



Il metodo grafico evidenzia la rappresentazione dei vincoli con R che è la regione delle soluzioni ammissibili e un punto in cui la soluzione è ottima perché la funzione obiettivo diventa massima e cioè $\text{Max } f(X) = 2x_1 + x_2 = 5$

L'uso del calcolatore consente di analizzare più velocemente l'ottimo in una regione di soluzioni ammissibili e di passare da una soluzione alla successiva utilizzando le informazioni ricavate dalle iterazioni precedenti per giungere ad iterazioni successive. (metodo evolutivo)

La velocità dell'algoritmo diventa a questo punto di importanza fondamentale : Dantzig (1963) ha proposto un metodo che consente di arrivare a soluzioni ottime senza passare attraverso tutti i vertici, ma solo per alcuni di essi : tale metodo presuppone la costruzione del cosiddetto " algoritmo del simplesso"

L'ottimo : cenno ai problemi di scelta in condizioni di incertezza

Spesso le scelte sono condizionate dal verificarsi o meno di condizioni aleatorie dette di incertezza , da informazioni spesso incomplete, dalle decisioni della concorrenza, dal verificarsi di eventi non previsti o che si erano trascurati.

In questi casi interviene il rischio della scelta che può essere affidata al calcolo del valor medio (detto della speranza matematica) o al criterio del maxi-min o del mini-max (detto più comunemente criterio del pessimista).

Il criterio del maxi-min o del mini-max è ben espresso come (rif10) criterio che non richiede alcuna valutazione dei k-eventi aleatori che determinano i risultati finali: nell'ipotesi che le conseguenze aleatorie siano dei guadagni , colui che adotta il criterio del maxi-min deve :
 1) determinare per ogni decisione il minimo guadagno; 2) scegliere l'alternativa a cui corrisponde il massimo di tali minimi guadagni;

PROBLEMA N°9

Un impianto petrolchimico produce nafta al prezzo unitario di 800 lire al litro , per rivenderla immediatamente a lire 1200 ; le quantità rimaste invendute potranno essere utilizzate nella centrale termica con un ricavo di lire 500

Determinare la scelta di produrre quantità secondo probabilità di vendita oppure affidandosi al minimo guadagno (certo)

Numero litri in migliaia	2	3	4	5	6
Probabilità di vendita	0,10	0,25	0,25	0,30	0,10

Indicando x = litri di nafta venduta; y = litri di nafta prodotta

Costo $C = 800 y$

Ricavo $R = 1200x + 500 (y - x)$

Guadagno (per $x \leq y$) $G = 1200x + 500 (y - x) - 800 y = 700x - 300y$

Guadagno (per $x > y$) $G = 1200y + 800 y = 400y$

La tabella dei possibili guadagni finali comprendente tutte le possibilità di guadagno legate alla probabilità può essere così scritta:

	y = 2	y = 3	y = 4	y = 5	y = 6	probabilità
X = 2	(x ≤ y) 800.(0,1)	(x ≤ y) 500.(0,1)	(x ≤ y) 200.(0,1)	(x ≤ y) - 100.(0,1)	(x ≤ y) - 400.(0,1)	0,10
X = 3	(x > y) 800.(0,25)	(x ≤ y) 1200.(0,25)	(x ≤ y) 900.(0,25)	(x ≤ y) 600.(0,25)	(x ≤ y) 300.(0,25)	0,25
X = 4	(x > y) 800.(0,25)	(x > y) 1200.(0,25)	(x ≤ y) 1300.(0,25)	(x ≤ y) 1300.(0,25)	(x ≤ y) 1000.(0,25)	0,25
X = 5	(x > y) 800.(0,30)	(x > y) 1200.(0,30)	(x > y) 2000.(0,30)	(x ≤ y) 2000.(0,30)	(x ≤ y) 1700.(0,30)	0,30
X = 6	(x > y) 800.(0,10)	(x > y) 1200.(0,10)	(x > y) 2000.(0,10)	(x > y) 2000.(0,10)	(x ≤ y) 2400.(0,10)	0,10
Valor medio	800	1130	<u>1285</u>	1265	1035	

Il valor medio che tiene conto delle probabilità ,indica la scelta più conveniente che è produrre y = 4000 litri

Il maxi-min considerando il massimo tra i minimi guadagni (cioè 800> 500>200>- 100>- 400), farà cadere la scelta su y = 2000 litri

Problema dell'ottimo in situazioni in cui il modello evolve da matematico a fisico

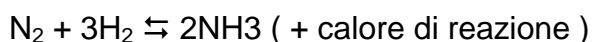
Il modello matematico evolve nel concetto di modello fisico quando " *il costrutto matematico con l'aggiunta di certe interpretazioni verbali descrive un fenomeno osservato*" (J.von Neumann) e quando " *esso fornisce una immagine parziale della realtà capace di comprendere uno o più aspetti e di esercitare un intervento pratico e efficace* " (G. Israel) .(rif.11)

Galilei per primo assunse come modello teorico quello del moto senza attrito ; altri hanno elaborato la complessità partendo da modelli semplici ma concretamente realizzabili per comprendere o sviluppare sistemi (insieme di parti che interagiscono per costruire una nuova entità) via via sempre più elaborati (dai combinatori ai sequenziali con memoria che realizza adattamenti "in progress" sino agli automatismi) con una evoluzione della logica che si affina dal cablato al programmato.

negli esempi successivi si tratterà un classico esempio di risoluzione di modello chimico ritenuto realizzabile solo in presenza di un elemento (paradossalmente non variabile) come il catalizzatore; inoltre si introdurranno i diversi aspetti del modello ambientale la cui comprensione e risoluzione dei problemi richiede sinergie tra modelli teorico matematici e politico sociali.

PROBLEMA N°12

L'ottimo come ricerca del miglior equilibrio tra variabili può condizionare le scelte in un processo chimico : Un caso interessante è lo studio della sintesi dell'ammoniaca il cui equilibrio è qui rappresentato :



Secondo il principio di Le Chatelier "una reazione chimica raggiunge un equilibrio , e se tale equilibrio viene in qualche modo disturbato dall'esterno, il sistema reagisce in modo da annullare il disturbo e ristabilire l'equilibrio " quindi indicando con [] le concentrazioni dei reagenti e prodotti oppure con p le pressioni parziali posso scrivere :

$$K_{eq} = \frac{[\text{NH}_3]^2}{[\text{N}_2][\text{H}_2]^3} =$$

$$K_p = \frac{p^2(\text{NH}_3)}{p(\text{N}_2) p^3(\text{H}_2)} =$$

e da queste dedurre che ,affinchè K rimanga costante , aumentando il denominatore aumenterà di conseguenza il numeratore , e dunque aumentando la concentrazione dei reagenti (o la loro pressione parziale) si otterrà più prodotto ammoniaca.

Una diminuzione di temperatura favorirà la reazione che è esotermica mentre un aumento sposterà l'equilibrio verso sinistra con formazione di reagenti a scapito del prodotto.

Allo stesso tempo una bassa temperatura influirà altresì sulla cinetica delle molecole (a bassa temperatura gli urti sono scarsi e dunque la reazione sarà estremamente lenta)

E' questo il classico caso in cui le condizioni di ottimo per uno sfruttamento in economia di tipo industriale non si realizzano per il conflitto tra le variabili (P, T, []) e i vincoli (a $T^{\circ} < 100^{\circ}$ la reazione è troppo lenta; a $T^{\circ} > 100$ la reazione porta alla formazione di prodotti di partenza)

Soluzione : la tecnologia interviene nell'irrisolto problema matematico con l'ausilio del catalizzatore : elemento che non partecipa alla reazione ma permette di raggiungere le condizioni ottimali di reazione aumentando la cinetica e dunque la velocità della reazione stessa.

PROBLEMA N°13

La filosofia "Tayloristica" che ha regolato la scelta nelle relazioni di tipo economico industriale è stata fortemente legata alla economicità mentre l'attuale aspirazione è la ricerca dell'eccellenza in cui economicità ed efficienza si coniughino alla politica del sociale in coerenza con uno sviluppo appropriato del territorio nel quale opera l'elemento produttivo.

La QUESTIONE AMBIENTALE può essere vista come ricerca dell'ottimo in un equilibrio tra modelli diversi di sviluppo e risorse dell'ambiente

Poiché il sistema produttivo tocca i fattori ambientali, consumandoli, è opportuno analizzare razionalmente il problema nell'ottica dei concetti di programmazione e di ottimizzazione che, al di là dei motivi etici (pur fondamentali) , realizzano il vero concetto di economia intesa come : disciplina logica e prassi comportamentale che realizza i massimi risultati con i minimi mezzi.

Dunque se la **funzione obiettivo** è l'economia ambientale , essa sarà

$$Z = f (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Con risultati attesi

- x_1 = economici: in termini di attivazione delle risorse e di probabile ritorno degli investimenti effettuati
- x_2 = sociali: in termini di ritorno a livello
- x_3 = ambientali: in termini di tutela e potenziale miglioramento della qualità ambientale
- x_4 = occupazionali: in termini di potenziale incremento dell'occupazione

ma con **vincoli** che possono essere parimenti rappresentati da :

a_1x_1 = degrado ambientale o inquinamento totale (compreso il concetto di consumo e distruzione delle risorse energetiche) intendendo $a_1x_1 > 0$ un aumento e $a_1x_1 < 0$ una diminuzione del degrado

a_2x_2 = aumento della popolazione, squilibri sociali

a_3x_3 = fattore tecnologico (quantità di inquinamento e di consumo di energia incorporata in unità di bene)

a_4x_4 = quantità di beni consumati da ciascuna persona

(l'elaborazione dell'esempio si limita agli aspetti più macroscopici del problema senza addentrarsi nella complessità)

Lo scopo è ottimizzare la funzione obiettivo lineare $z = cx$ rendendo minimi i vincoli che, espressi come ax , potrebbero rappresentarsi in una disequaglianza come :

$$\sum_{i=1}^n a_n x_n \leq 0 \quad (\text{formula n}^\circ 1)$$

(dove x rappresenta le variabili di decisione e è $x \geq 0$, c i coefficienti della funzione obiettivo, a i coefficienti della variabile di decisione)

Graficamente un razionale schema applicato al concetto di programmazione indica le possibili soluzioni di metodo: Un programma nasce in una situazione definita da una funzione e delimitata da vincoli, quando questi ultimi mancano, la funzione obiettivo si semplifica e se addirittura si annullano si può parlare di sperimentazione di più obiettivi possibili ; se manca la funzione obiettivo mentre esistono vincoli, si dovrà negoziare una funzione obiettivo che sia adatta ai vincoli esistenti.

In mancanza di funzione obiettivo e vincoli c'è il caos o forse nasce una nuova funzione delimitata da nuovi vincoli.



La complessa elaborazione di un tale modello (o forse sintesi di più modelli) porta al concetto di :SVILUPPO SOSTENIBILE

Il concetto di sviluppo sostenibile è entrato oggi nel linguaggio comune di chi si occupa di pianificazione (PRG, piani Territoriali, Leggi, Documenti regionali ecc.)

E' variamente definito come sviluppo che soddisfa i bisogni del presente senza compromettere la capacità delle generazioni future di soddisfare i propri. ,richiede l'integrazione di ecologia e economia definendo i limiti di vivibilità all'interno di un certo ambiente .

Al pari vengono definiti i limiti di insostenibilità : crescita esponenziale demografica , desertificazione (perdita di suoli agricoli) ; distruzione manto forestale , inquinamento della biosfera , inquinamento e diminuzione dell'acqua , ecc., squilibrio paesi ricchi e paesi poveri

Indice del benessere di un'economia sostenibile (indice di sostenibilità). È un indice di misura e quantificazione dello sviluppo sostenibile che nel calcolare il benessere di una nazione non usa solo termini economici che riportano il tutto alla moneta.

Ci sono voci come i costi di urbanizzazione, i costi di trasporto, la perdita di aree umide, la perdita di terreni coltivabili, la perdita di risorse non rinnovabili.

Dalla disuguaglianza precedente si può giungere alla Formula della sostenibilità semplice proposta da Pearce in Economia Verde.

$$\sum E < 0$$

Dove E = danni ambientali cioè le voci più importanti dell'insostenibilità (alterazione e distruzione di risorse non rinnovabili)

Per la città è possibile utilizzare questa semplice equazione misurando il danno ambientale (consumo e alterazioni irreversibili delle risorse non rinnovabili). E' una contabilizzazione difficile ma praticabile e concreta.

Nasce il concetto di pianificazione del territorio

Evolve nella cultura dello sviluppo sostenibile il concetto di Piano regolatore che debba fare un bilancio più che produrre un azionamento classico (cultura razionalista); ad ogni uso e destinazione deve chiedersi se la trasformazione programmata consuma: cosa, dove, quanto e come.

Il Piano mette in gioco delle quantità (nella trasformazione) localizzate in luoghi specifici (ad es. oggi si calcolano i costi di urbanizzazione per la trasformazione di zone specifiche) che secondo l'arch. Terzi (rif.9) interagiscono nel cambiamento :

"il nuovo Piano cambia completamente l'asse del ragionamento , spostando l'attenzione dal singolo elemento ad un comparto più ampio, che in prospettiva, si realizza ed organizza per parti"

Dunque la formula precedente evolve in una più complessa formula della sostenibilità realizzata per singole parti o aree omogenee :

$$\sum E = \sum E_1 + \sum E_2 + \dots + \sum E_n < 0$$

Oggi è necessario fare un bilancio di consumo dei fattori ambientali (suolo, acqua, atmosfera); delle componenti ambientali si elaborano bilanci (quanti ne trasformo, quanti ne conservo, quanti ne distruggo). La sommatoria dei danni ambientali deve essere minore di zero. Entra in gioco il conteggio e la valutazione ambientale (ad esempio una zona industriale a cui venga contemporaneamente affiancato un parco e un sistema di depurazione delle acque e recupero di un corso d'acqua degradato, si può intendere con bilancio in favore di danno ambientale minore (<0) della situazione precedente.

Un a sinergia di competenze è necessaria per realizzare l'**ottimizzazione** degli obiettivi e ciò richiederà la disponibilità di diverse figure

Il politico attua leggi che fissano limiti operativi proposti. Leggi legate all'inquinamento delle acque, atmosfera, protezione del suolo, rimboschimento, razionale uso della energia, equilibrio demografico, equilibrio economico nord/sud.

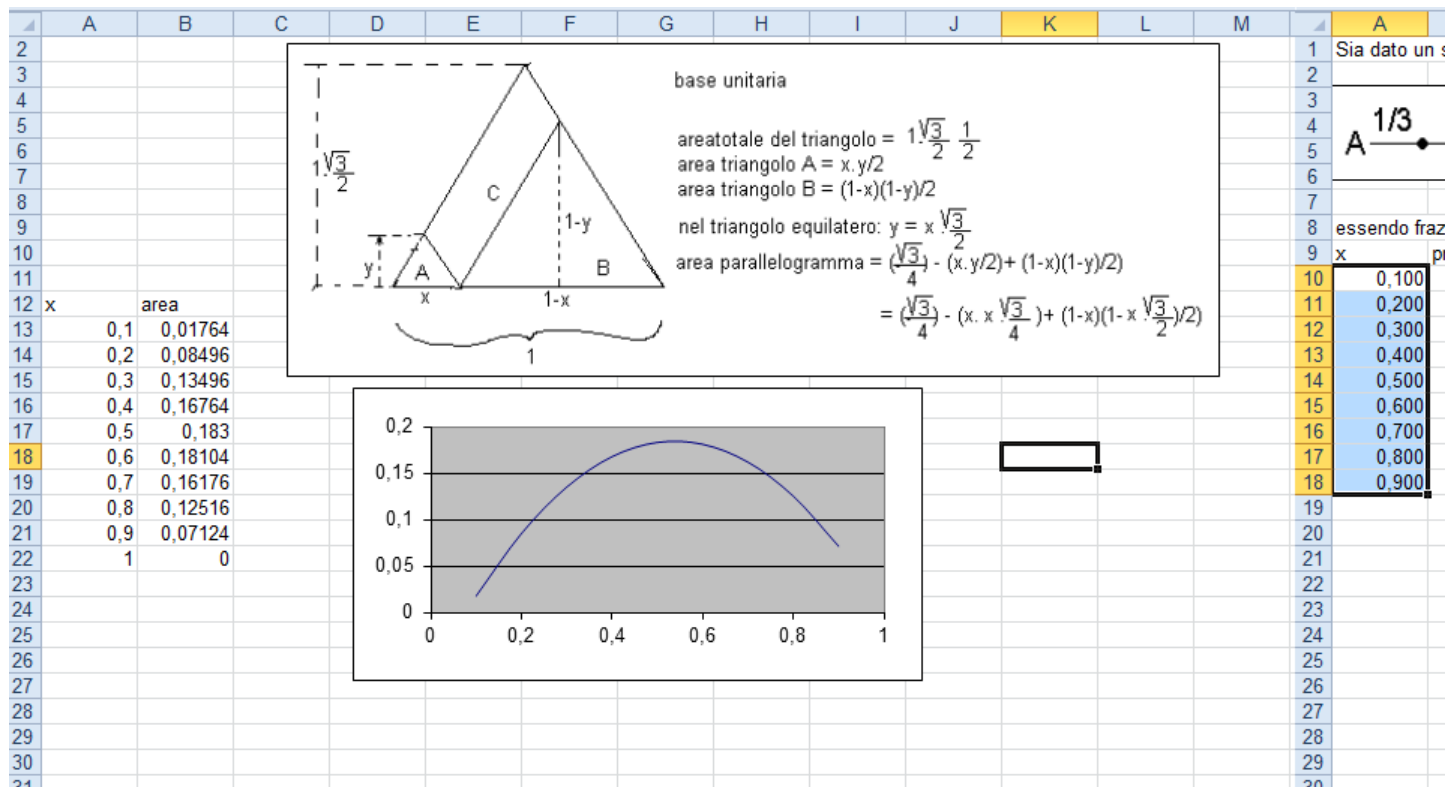
Il tecnico (chimico, geologo, architetto , geometra) collabora con le amministrazioni di competenza (es :ASL-UOC-PMP, ANPA(Agenzia Nazionale Protezione Ambiente), EMAS(Sistema comunitario di ecogestione nel quale le imprese aderiscono volontariamente)), Ordine (comportamento etico/deontologico), Università' (valutazione scientifica dei dati), associazioni ambientali , Ente Comune, Provincia Regione, Ministero.....)

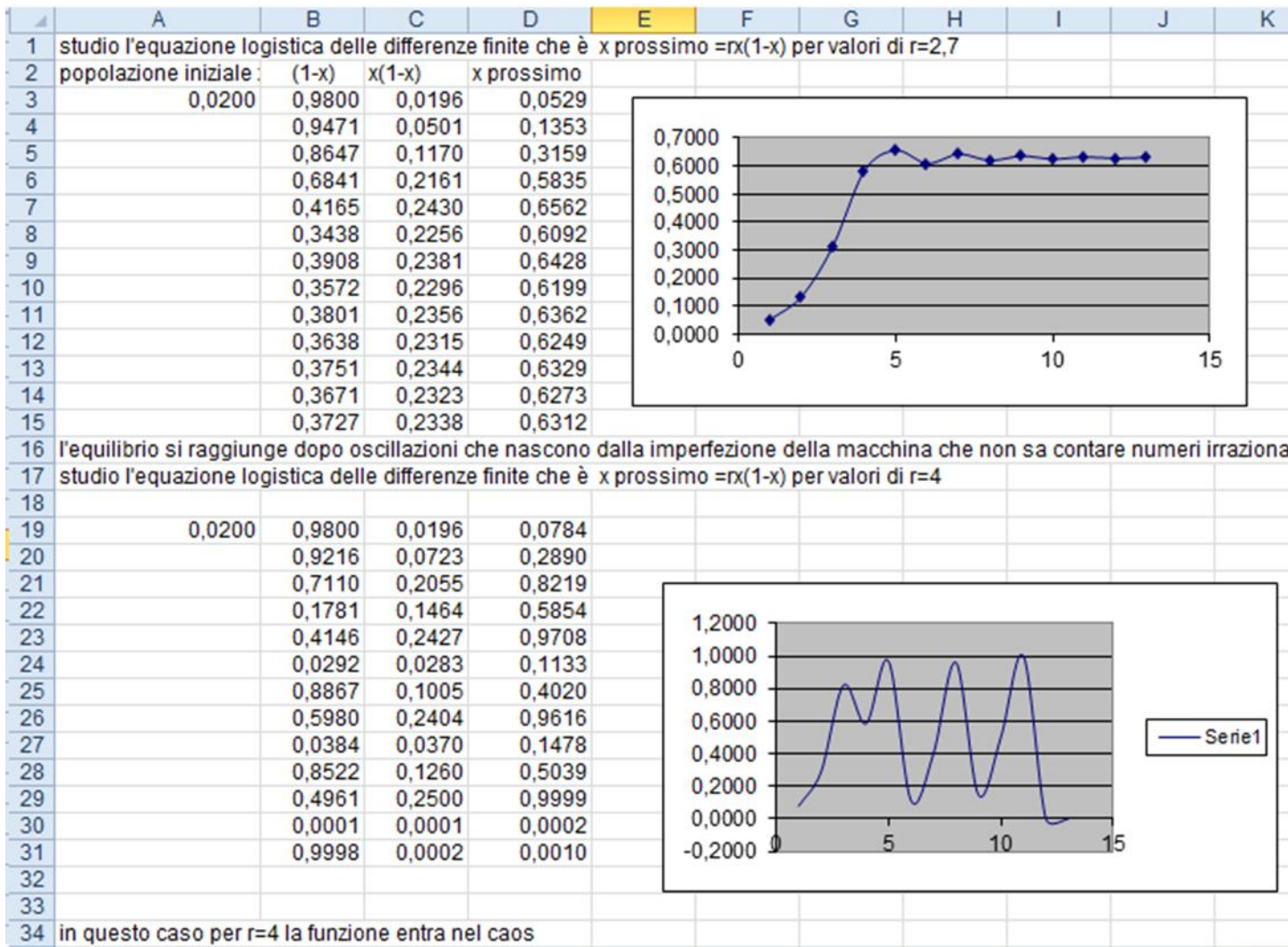
Il cittadino denuncia inosservanze alla legge e ,attraverso strumenti diversi di comunicazione culturale, elabora proposte e partecipa alla valutazione di impatto ambientale che ,nel cosiddetto "sviluppo sostenibile", coniuga il benessere sociale con la possibilità' di sopravvivenza delle generazioni future .

La collaborazione tra queste figure è oggi quanto mai necessaria nella gestione dell'ottimo in una realtà che interseca equilibri di tipo sociale e di economia industriale. : un esempio discutibile è nel recente DL 334 del 17.8.99 in cui aziende di classe B e C non sono tenute a inviare al Sindaco (che ha l'obbligo di informare la cittadinanza art, 22 ,.) scheda informativa sulle sostanze tossiche e pericolose presenti in stabilimento ; ed ancora : per aziende di tipo A₂ ,B,C non viene previsto l'invio a Prefetto e Provincia (resp. Protezione Civile) di informazioni utili per l'elaborazione di un piano di emergenza esterno.

-

Al termine di questo lavoro una **valutazione** didattica sarà sempre legata agli obiettivi teorici, pratici e di orientamento previsti e potrà essere nella scuola motivo di **recupero** culturale del valore dell'ottimo come concetto di temperanza e non di preminenza o vantaggio in una umana prospettiva di condivisione sociale.





Bibliografia

1. G. B. Dantzig :Linear Programming and Extensions . Princeton University Press, Princeton (N.J.) 1963.
2. A. Schrijver : Theory of Linear and Integer Programming . J.Wiley & Sons, New York 1986.
3. G. Bessiere : Il calcolo differenziale e integrale: Hoepli, 1964
4. Raffaella Manara :Matematica controlluce. Ed.Mc Graw Hill, 1999
5. Enciclopedia UTET
6. A.Cacciatore ,E.Stocchi: Impianti chimici industriali, Edisco, 1999
7. Silvio di Pietro :Tecnologie Chimiche Industriali, Hoepli, 1998
8. Schlager K.I :A Land Use Plan Design Model. Journal of the Institute of Planners,1965
9. Arch. Terzi Assessorato all'Urbanistica del Comune di Cremona : Mondo Padano .04.03.2000
10. Dodero, Baroncini, Manfredi: Gli argomenti di matematica "; Ghisetti e Corvi editori, 1998
11. Nicosia S : Le parole della matematica . CEDAM 1998

12. D. Halliday R. Resnick: Fisica Casa Editrice Ambrosiana

13. M. Krasnov; G. Makarenko; A. Kiselev : "Calcolo delle variazioni" N3 Δ A T E Λ bCT B

14. Wirner : analisi matematica vol 1. CEDAM